الصف الأول الثانوي . الترم الأول

ملخص . الزاوية الموجهة

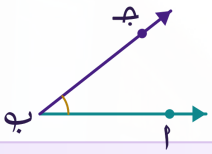
حساب المثلثات . الدرس الأول

الزاوية الموجهة | القياس الموجب والسالب | الوضع القياسي | موقع الزاوية | الزوايا المتكافئة | عقربا الساعة

١ الزاوية الموجهة

١ الزاوية

- هي اتحاد شعاعين لهما نفس نقطة البداية ، تسمى رأس الزاوية ، ويسمى الشعاعين ضلعا الزاوية



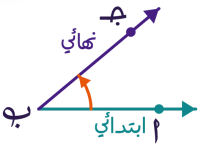
ق∠أ بـ جـ = بـ أ ∪ بـ جـ

- رأس الزاوية: النقطة بـ
- ضلعا الزاوية: بـ أ ، بـ جـ
- اسم الزاوية: ∠أ بـ جـ أو ∠جـ بـ أ أو ∠بـ

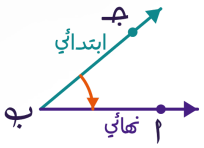
✎ ترتيب الأضلاع غير مهم

٢ الزاوية الموجهة

- هي زوج مرتب من شعاعين هما ضلعا الزاوية لهما نفس نقطة البداية ، يسمى الأول ضلع ابتدائي ويسمى الثاني ضلع نهائي



∠أ بـ جـ الموجهة



∠جـ بـ أ الموجهة

∠أ بـ جـ الموجهة يعبر عنها الزوج (بـ أ ، بـ جـ)	∠جـ بـ أ الموجهة يعبر عنها الزوج (بـ جـ ، بـ أ)

ملاحظات

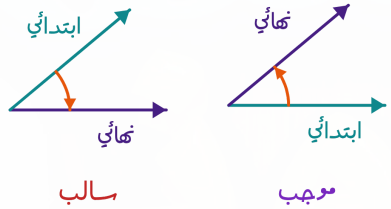
١ الزاوية الموجهة (أ بـ جـ) ≠ الزاوية الموجهة (جـ بـ أ)
لأن (بـ أ ، بـ جـ) ≠ (بـ جـ ، بـ أ) ، لكن
ق(∠أ بـ جـ) الموجهة = −ق(∠جـ بـ أ) الموجهة

٢ للتعبير عن الزوج المرتب (و أ ، و بـ): الحرف الأول نلغيه والباقي نخليه ⟸ ∠أ و بـ الموجهة

٣ والعكس: من اسم الزاوية للزوج المرتب ، الحرف اللي في النص هو الرأس ، وأول حرف هو اللي على الضلع الابتدائي:
∠جـ بـ أ الموجهة ⟸ (بـ جـ ، بـ أ)

٢ القياس الموجب والقياس السالب للزاوية الموجهة

٤ يكون قياس الزاوية الموجهة



- إذا كان الدوران من الضلع الابتدائي إلى الضلع النهائي:

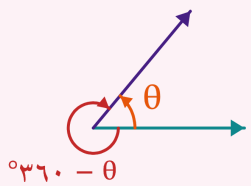
في عكس اتجاه حركة عقارب الساعة ⟸ القياس موجب	في نفس اتجاه حركة عقارب الساعة ⟸ القياس سالب

ملاحظات

١ لكل زاوية موجهة قياسان أحدهما موجب والآخر سالب

٢ إذا كان القياس الموجب للزاوية الموجهة = θ فإن القياس السالب لنفس الزاوية = θ − ٣٦٠°

٣ إذا كان القياس السالب للزاوية الموجهة = −θ فإن القياس الموجب لنفس الزاوية = −θ + ٣٦٠° = ٣٦٠° − θ



01068860068

٤) مجموع القيمتين المطلقتين للقياسين = ٣٦٠°

القيمة المطلقة للقياس الموجب + القيمة المطلقة للقياس السالب = ٣٦٠°

مثال ٦٠° و−٣٠٠°: ٦٠ + ٣٠٠ = ٣٦٠°

٥) إذا كان θ_1 هو أصغر قياس موجب لزاوية ، θ_2 هو أكبر قياس سالب لنفس الزاوية فإن:

$\theta_1 - \theta_2 = 360°$ | $\theta_2 - \theta_1 = -360°$

$-360° < \theta_1 + \theta_2 < 360°$

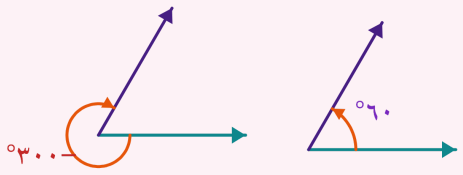
مثال $(\theta + 40)°$ ، $(\theta 11 - 40)°$ القياسان الموجب والسالب لزاوية ⟸

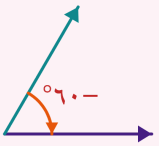
$(\theta + 40) - (\theta 11 - 40) = 360°$ ⟸

$\theta 12 = 360°$ ⟸ $\theta = 30°$

٦) لو الزاوية الموجهة دورة كاملة (الضلع النهائي فوق الابتدائي) يبقى أصغر قياس موجب ٣٦٠° وأكبر قياس سالب −٣٦٠° ، لأن الصفر لا موجب ولا سالب

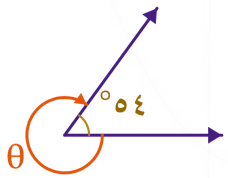
٧) الزاوية اللي قياسها الموجب ٦٠° قياسها السالب −٣٠٠°: نفس الضلع الابتدائي ونفس الضلع النهائي ، والفرق إن الدوران في الاتجاه العكسي. أما لو بدّلنا الضلعين (النهائي بقى ابتدائي) تبقى زاوية تانية قياسها −٦٠°





بعد تبديل الضلعين

٦ إيجاد قياس الزاوية الموجهة θ من الرسم



- القوس يبدأ من الضلع الابتدائي ويخلص عند الضلع النهائي
- سهم القوس عكس عقارب الساعة ⟸ θ موجبة ، ومع عقارب الساعة ⟸ θ سالبة
- القوس لافف الزاوية المكتوبة ⟸ |θ| = الزاوية المكتوبة
- القوس لافف الجزء التاني من الدورة ⟸ |θ| = ٣٦٠° − الزاوية المكتوبة

مثال الزاوية المكتوبة ٥٤° ، والقوس لافف الجزء التاني مع عقارب الساعة ⟸ θ = −(٣٦٠° − ٥٤°) = −٣٠٦°

لو فيه دقائق: ١° = ٦٠′ ، ١′ = ٦٠″

٣٦٠° = ٣٥٩°٦٠′ = ٣٥٩°٥٩′٦٠″

مثال ٣٦٠° − ٥٩°٣٢′

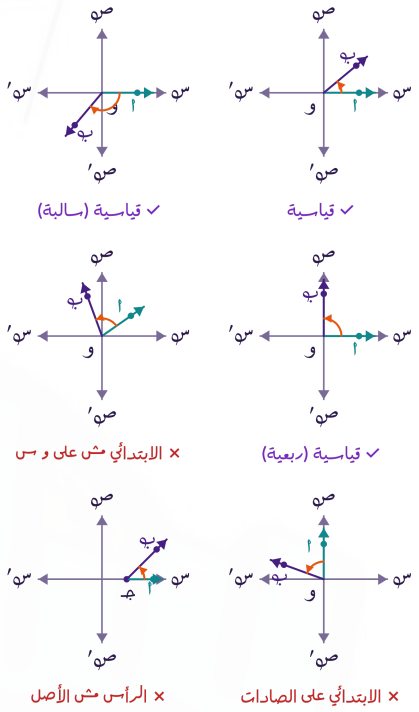
= ٣٥٩°٦٠′ − ٥٩°٣٢′ = ٣٠٠°٢٨′

٣ الوضع القياسي للزاوية الموجهة

٧ تكون الزاوية الموجهة في الوضع القياسي

- إذا تحقق الشرطان:
- (١) رأسها هو نقطة الأصل لنظام إحداثي متعامد
- (٢) ضلعها الابتدائي يقع على الجزء الموجب لمحور السينات

01068860068



ملاحظات

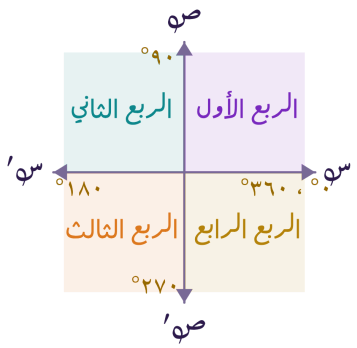
١ جميع الزوايا في الوضع القياسي لها نفس الضلع الابتدائي $\overrightarrow{و\,س}$

٢ الزاوية ممكن تكون في الوضع القياسي وقياسها سالب ، الإشارة مش شرط

٣ الرأس عند نقطة الأصل لوحده مش كفاية ، لازم الضلع الابتدائي على الجزء الموجب لمحور السينات بالظبط ، مش على محور الصادات

٤ موقع الزاوية في الإحداثي المتعامد

٩ ينقسم المستوى الإحداثي إلى أربعة أرباع



$٠° < \theta < ٩٠°$ ⟸ الربع الأول	$٩٠° < \theta < ١٨٠°$ ⟸ الربع الثاني
$١٨٠° < \theta < ٢٧٠°$ ⟸ الربع الثالث	$٢٧٠° < \theta < ٣٦٠°$ ⟸ الربع الرابع

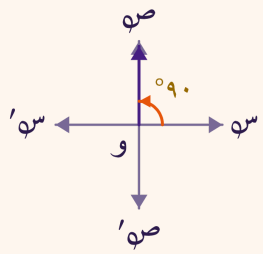
ملاحظات

١ لتحديد الربع الذي تقع فيه الزاوية الموجهة يجب إيجاد أصغر قياس موجب لها أولًا

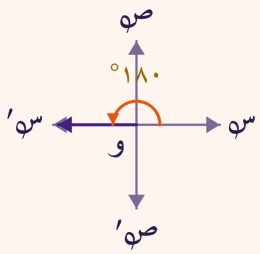
٢ إذا وقع الضلع النهائي على أحد محوري الإحداثيات تسمى الزاوية الربعية أو الزاوية المحورية ، وهي

$٠° ، ٩٠° ، ١٨٠° ، ٢٧٠° ، ٣٦٠°$

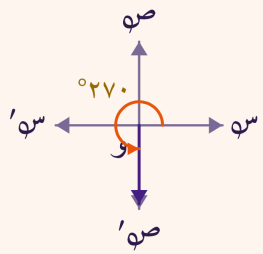
٣ الزوايا الربعية هي أحد مضاعفات الـ $٩٠°$



(٩٠°)



(١٨٠°)



(٢٧٠°)

٤ لتحديد الربع للزوايا الكبيرة نقسم على $٣٦٠°$ فيكون الناتج عدد صحيح وعدد عشري ، والزاوية = العدد العشري $\times ٣٦٠°$

مثال مليون°: $١٠٠٠٠٠٠ \div ٣٦٠ = ٢٧٧٧,٧٧...$

$٠,٧٧... \times ٣٦٠ = ٢٨٠° \Longleftarrow$ الربع الرابع

٥ لو الزاوية سالبة نضيف $٣٦٠°$ لحد ما تبقى موجبة:

$-١٠٧٠° + ٣ \times ٣٦٠° = ١٠° \Longleftarrow$ الربع الأول

01068860068

٦ لو ناتج القسمة عدد صحيح بالظبط (زي ٧٢٠° ÷ ٣٦٠° = ٢) يبقى الضلع النهائي على الجزء الموجب لمحور السينات ، وأصغر قياس موجب ٣٦٠°

٧ الإشارة بتتحدد من اتجاه الدوران ، مش من الربع اللي فيه الضلع النهائي: −٣١٠° سالبة وضلعها النهائي في الربع الأول ، و٢١٣° موجبة وضلعها النهائي في الربع الثالث

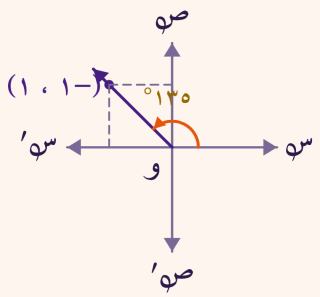
٨ الزاوية القريبة من المحور مش ربعية: ٨٩°٥٨′ في الربع الأول ، ١٨٠°٣′ في الربع الثالث ، أما ٢٦٩°٥٩′٦٠″ = ٢٧٠° فربعية

٩ لو الضلع النهائي بيعدي بنقطة (س ، ص) غير نقطة الأصل ، الربع من إشارتي الإحداثيين:

(+ ، +) الربع الأول	(− ، +) الربع الثاني
(− ، −) الربع الثالث	(+ ، −) الربع الرابع

١٠ لو أحد الإحداثيين صفر ⟸ الضلع النهائي على محور ⟸ زاوية ربعية: (٠ ، −١) على الجزء السالب لمحور الصادات

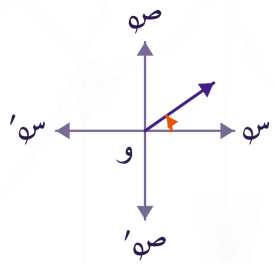
١١ لو الإحداثيين متساويين في المقدار زي (−١ ، ١) ⟸ الزاوية ١٣٥°



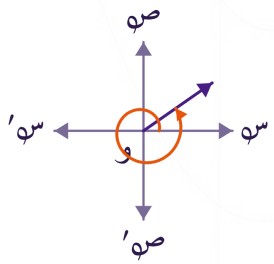
٥ الزوايا المتكافئة

١١ الزوايا المتكافئة

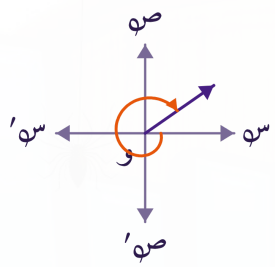
- هي زوايا لها نفس الضلع النهائي بدوران ± ٣٦٠°ن حيث ن ∈ ص



(θ)



(θ + ٣٦٠°)

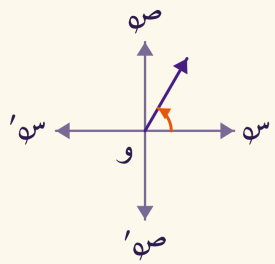


(θ − ٣٦٠°)

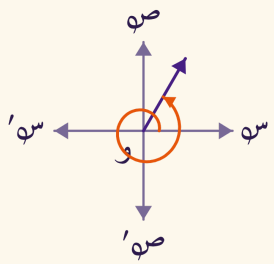
ملاحظات

١ الكلام هنا عن زوايا في الوضع القياسي ، يعني الضلع الابتدائي مشترك كان (و س)

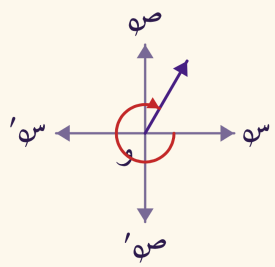
٢ الزاوية ٦٠°: لو كلنا بعدها دورة كاملة نرجع لنفس الضلع النهائي والقياس يبقى ٦٠° + ٣٦٠° = ٤٢٠° ، ولو لفينا مع عقارب الساعة نوصل لنفس الضلع النهائي بقياس ٦٠° − ٣٦٠° = −٣٠٠°



(٦٠°)



(٤٢٠°)



(−٣٠٠°)

01068860068



٣ القياسات ٦٠° ، ٤٢٠° ، −٣٠٠° مختلفة ، لكن الضلع النهائي واحد ⟸ زوايا متكافئة ، والفرق بين أي اثنين منهم دورات كاملة

٤ يوجد عدد لا نهائي من الزوايا المتكافئة بقياس موجب وقياس سالب تشترك في الضلع النهائي

٥ لتحديد الربع الذي تقع فيه الزاوية

θ + ن × ٣٦٠° + α: نحذف الدورات الكاملة

ن٣٦٠° = (٢ن) × ١٨٠°	ن٣٦٠° = (٤ن) × ٩٠°

مثال

= ٤٥° + (٤ن + ١) × ٩٠° = ٤٥° + ن٣٦٠° + ٩٠°

⟸ الربع الثاني

٦ أو التعويض عن قيمة ن بعدد صحيح ثم إيجاد أصغر زاوية موجبة

⚠ انتبه التعويض بـ ن = ٠ ينفع بس لو ن جاية مع ٣٦٠° (دورات كاملة). لكن ٦٠° + ن١٨٠° مثلًا: ن = ٠ ⟸ الربع الأول ، و ن = ١ ⟸ الربع الثالث

٧ إذا كان أ ، بـ زاويتان متكافئتان فإن: أ = بـ ± ن٣٦٠° حيث ن ∈ ص

٨ إذا كان أ ، بـ زاويتان متكافئتان فإن (حيث جـ ∈ ص):

−أ ، −بـ متكافئتان	أ + جـ ، بـ + جـ متكافئتان
أ − جـ ، بـ − جـ متكافئتان	أ جـ ، بـ جـ متكافئتان

٩ الضرب في عدد صحيح يحافظ على التكافؤ ، أما القسمة أو الضرب في عدد مش صحيح فمش مضمون نحافظ عليه: ٠° و ٣٦٠° متكافئتان ، لكن نصهم ٠° و ١٨٠° مش متكافئتين

١٠ لو الزاويتين بدلالة متغير: الفرق بينهم = ن٣٦٠°

أ ، −أ متكافئتان	θ٢ ، −θ متكافئتان
أ٢ = ن٣٦٠° ⟸	θ٣ = ن٣٦٠° ⟸
أ = ن١٨٠°	θ = ن١٢٠°

θ ، θ٢ متكافئتان	(θ٢ + ٢٥°) ، (θ٧ − ٢٥°)
θ = ن٣٦٠°	θ٩ = ن٣٦٠° ⟸
	θ = ن٤٠°

١١ في سؤال «مكافئة للزاوية ... ما عدا»: اطرح الزاوية المعطاة من كل اختيار ، والفرق لازم يكون من مضاعفات ٣٦٠°

مثال مكافئة لـ ٧٥°: −٢٨٥° − ٧٥° = −٣٦٠° ✓ ،

٢٨٥° − ٧٥° = ٢١٠° ✗

١٢ الزاويتين في نفس الربع مش معناه إنهم متكافئتين: ٢٠° و ٧٠° الاتنين في الربع الأول والفرق ٥٠°

١٣ إذا دار الضلع النهائي لزاوية قياسها θ دورتين ونصف

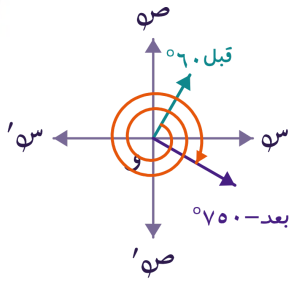
عكس عقارب الساعة يكون	مع عقارب الساعة يكون
القياس الجديد θ + ١٨٠°	القياس الجديد θ − ١٨٠°

بشكل عام نحوّل الدورات لدرجات (ربع دورة = ٩٠° ، نص دورة = ١٨٠° ، دورة = ٣٦٠°) وبعدين:

عكس عقارب الساعة: القياس الجديد = θ + مقدار الدوران

مع عقارب الساعة: القياس الجديد = θ − مقدار الدوران

01068860068



مثال ٦٠° دار دورتين وربع مع عقارب الساعة:

٦٠° − ٨١٠° = −٧٥٠° ، وهي مكافئة لـ ٣٣٠° ⟸ الربع الرابع

مثال ٤٥° دار دورتين ونصف عكس عقارب الساعة:

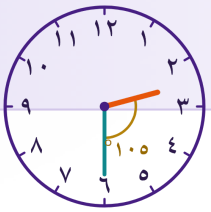
٤٥° + ٩٠٠° = ٩٤٥° ، وهي مكافئة لـ ٢٢٥° ⟸ الربع الثالث

✎ لو السؤال عن قياس الزاوية بعد الدوران فالإجابة −٧٥٠° ، ولو عن الربع نجيب المكافئ لها

٦ قياس الزاوية بين عقرب الساعات والدقائق

١٤ قياس الزاوية بين عقرب الساعات والدقائق

= |٣٠ × عدد الساعات − ٥,٥ × عدد الدقائق|



● الزاوية بين عقربي الساعات والدقائق للساعة (٢:٣٠):

= |٣٠ × ٢ − ٥,٥ × ٣٠| = |٦٠ − ١٦٥| = ١٠٥°

ملاحظات

١ عقرب الساعات يميل ٣٠° كل ساعة (٠,٥° كل دقيقة) ، وعقرب الدقائق ٦° كل دقيقة ، و٥,٥ = ٦ − ٠,٥

٢ لو الناتج أكبر من ١٨٠° ⟸ الزاوية الصغرى = ٣٦٠° − الناتج: الساعة ١١:٠٠ ⟸ |٣٣٠ − ٠| = ٣٣٠° ⟸ الصغرى ٣٠°

٣ الزاوية بين العقربين (من غير اتجاه) في الساعة ٣:٣٠:

|١٦٥ − ٩٠| = ٧٥°

٤ أما لو السؤال عن الزاوية الموجهة من عقرب الدقائق (ابتدائي) لعقرب الساعات (نهائي) في الساعة ٣:٣٠:

عكس عقارب الساعة:	مع عقارب الساعة:
٧٥°	٧٥° − ٣٦٠° = −٢٨٥°

01068860068